

ЗУЛ и их значения

123/09

Задача д/у-ния теплопровод-ти с
классич. кр. усл.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$\begin{cases} \Gamma_0(u) = 0, & \Gamma_l(u) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u = u(x, t) = ?$$

Ответ: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} X_k(x)$, где

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx \quad (*)$$

Здесь λ_k, X_k, Γ_k — спектр ЗУЛ

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l (X_k(x))^2 dx$$

Центр. роль в реш. играет ЗУЛ

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \Gamma_0(X) = 0, & \Gamma_l(X) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Gamma_0(X) = 0, \quad \Gamma_l(X) = 0$$

Здесь Γ_0, Γ_l — класс краев. операторы:

$$(I_0) \Gamma_0(X) \equiv X(0)$$

$$(I_l) \Gamma_l(X) \equiv X(l)$$

$$(II_0) \Gamma_0(X) \equiv X'(0)$$

$$(II_l) \Gamma_l(X) \equiv X'(l)$$

$$(III_0) \Gamma_0(X) \equiv X'(0) - h_0 X(0) \quad (III_l) \Gamma_l(X) \equiv X'(l) + h_1 X(l)$$

Здесь h_0, h_1 — попер. коэфф-ты $\leftarrow$ из соотношений с тепловым потоком

Предостережения:

1) Кра. усл. в ЗМЛ (1) — это только однородные

2) Кра. операторы в ЗМЛ (1) (Γ_0, Γ_l) в точности соответствуют кра. операторам из исходной задачи ИФ (напр., теплопроводности)

Постановка ЗМЛ:

Д/с-м (1) требуется найти знач. $\lambda \in \mathbb{R}$ (собств. знач-я ЗМЛ), при λ данная с-ма имеет нетривиал. реш. $X(x) \not\equiv 0$ на $[0, l]$ (собств. ф-ции ЗМЛ). Совокупность всех с.зн. и отвечающих им с.ф. образует спектр ЗМЛ

Краткая постановка змл:

Дана с-ма (1), требуется найти спектр.

Сформулируем без полного док-ва след. фундамент. результат.

↓ (в спектре (ЗМЛ) $\neq$ ЗМЛ (1) с классич.

кр. операторами Γ_0, Γ_1 . Тогда:

1) $\exists$ счетное мн-во с.знач.

$0 (= \lambda_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ возможно

2) $\forall \lambda$ с.зн. $\lambda_n \exists$ с.фр. $X_n(x)$, единств-я с точностью до умножения на ненулев. const

3) совокупность всех с.фр. $X_n(x)$ образует полную ортогональную с-му на $[0, l]$ (базис Фурье). $\forall$ достаточно хорошую ф-цию $\varphi(x)$ на $[0, l]$ можно разложить в ряд Фурье:

р-е: $\varphi(x) \sim \sum_n \lambda_n X_n(x)$ на $[0, l]$, где $\lambda_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx$, $\|X_n\|^2 = \int_0^l (X_n(x))^2 dx$

4) Три дополнит. ограничения на $\varphi(x)$ сх-ты
ряда (2) дополнительно уточняется

1) $\varphi \in C^2[0, l]$, $\Gamma_0(\varphi) = 0$, $\Gamma_l(\varphi) = 0$. Тогда

$\varphi(x) = \sum_n \varphi_n X_n(x)$ на $[0, l]$, причем ряд сх-а
абсолют. и непр. (1) Стеклова

▲ (Без полного док-ва ограничива-
ется некот. коммента-ми)

Комм-и к п.3: * лин пр-во подхв-щих
ф-ций на $[0, l]$. В нем есть операция
ск. произв-а: $(f, g) = \int_0^l f(x)g(x)dx$

$\{X_n(x)\}$ — ортол. с-ма $\stackrel{\text{def}}{<}$, $(X_n, X_k) = \int_0^l X_n(x)X_k(x)dx = 0$ при $n \neq k$.

$\{X_n(x)\}$ — полная с-ма на $[0, l] \stackrel{\text{def}}{<} \Leftrightarrow$ If
 $\int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx = 0 \forall n$, то $\varphi(x) = 0$ на
 $[0, l]$ (всюду или почти всюду)

Откуда следуют ф-лы Фурье?

* разложение $\varphi(x) = \sum_n \varphi_n X_n(x)$ на $[0, l]$
(Допустим, ряд хорошо сх-са). $\varphi_n = ?$

* $(\varphi(x), X_k(x)) = (\sum_n \varphi_n X_n(x), X_k(x)) = \sum_n \varphi_n$

$(X_n(x), X_k(x)) = \delta_{nk}$ ($X_k(0), X_k(x) = \delta_{kk} \|X_k\|^2$),

где $\|X_k\|^2 > 0 \Rightarrow A_k = \frac{(\varphi, X_k(x))}{\|X_k\|^2} = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) \cdot$

$X_k(x) dx$, $\forall k$ (ф-ла. Фурье д/коэф-тов Фурье)

Ф-лы Фурье — простое следствие ортогональности с-ма

Комм-й к п. 1): с. зн. всегда неотриц.

Это важно д/сх-ты ряда (* при $t > 0$)

Лемма I $\varphi \in C^1[0, l]$, причем $\Gamma_0(\varphi) = \Gamma_l(\varphi) = 0$ с классич. кр. операторами Γ_0, Γ_l

Тогда: а) $\varphi(0) \cdot \varphi'(0) \geq 0$

б) $\varphi(l) \cdot \varphi'(l) \leq 0$

в) $\varphi(0) \varphi'(0) - \varphi(l) \varphi'(l) \geq 0$

▲ см. (I.0), (II.0), (III.0) д/а)

см. (I.e), (II.e), (III.e) д/б)

см. а) и б) д/в) ■

// а) — в) называют также соотношениями диссипативности (рассеяние энергии). Они означают рассеяние энергии на краях стержня

Лемма $\stackrel{\text{def}}{=}$ Лемма о диссипативности

Классич. краев. усл.

↓ Собств. знач. в ЗМЛ (1) с классич. кр. операторами Γ_0, Γ_1 либо только неотриц.

▲ $\int_0^l \varphi_k$ — некот. с.зн. $g(l)$ с с.ф. $X_k(x)$. $\neq$
выр-ние $\int_0^l (X_k'(x))^2 dx \cdot (\varphi_k) = \int_0^l X_k(x) (\varphi_k X_k'(x)) dx$
 $\stackrel{(1)}{=} \int_0^l X_k(x) (-X_k''(x)) dx = - \int_0^l X_k(x) dX_k'(x) =$
 $= X_k(x) X_k'(x) \Big|_0^l + \int_0^l (X_k'(x))^2 dx \geq X_k(x).$
 ≥ 0

• $X_k'(x) \Big|_0^l = X_k(0) X_k'(0) - X_k(l) X_k'(l) \geq 0$ (по
Лемме п. в))

$\Rightarrow \varphi_k \int_0^l (X_k'(x))^2 dx \geq 0$. Здесь $\int_0^l (X_k'(x))^2 dx > 0$,
т.к. $X_k(x) \not\equiv 0$ на $[0, l]$ (с.ф.) $\Rightarrow \varphi_k \geq 0$ ■

Практический вывод: при исследовании классич. ЗМЛ случай $\lambda < 0$
 $\neq$ не надо

! Зам. Отдельно показ-ся, что в классич. ЗМЛ спектр либо только вещ. и $\lambda \in \mathbb{R}$
 $\setminus \mathbb{R}$ можно так же не